



TITLE:

変わり点を含む線型常微分方程式:
解の漸近展開 (境界層と変わり点に
関するシンポジウム報告 I)

AUTHOR(S):

木村, 俊房

CITATION:

木村, 俊房. 変わり点を含む線型常微分方程式: 解の漸近展開 (境界層と
変わり点に関するシンポジウム報告 I). 数理解析研究所講究録 1965, 2:
28-40

ISSUE DATE:

1965-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107350>

RIGHT:

I 一つの助変数を含む方程式

一つの助変数 ε を含む方程式

$$(1) \quad \varepsilon^\sigma \frac{d\bar{y}}{dx} = A(x, \varepsilon) \bar{y}$$

を考える。ここで、 \bar{y} は n 次元複素ベクトル、 $A(x, \varepsilon)$ は n 次の複素行列、 σ は負でない整数とする。 x は有界単連結領域を動く複素変数でも、有界閉区間を動く実変数でもよい。しかし記述を統一するため、 x は領域 D を動く複素変数とする。

1.1. 形式解

$A(x, \varepsilon)$ は形式的な ε のべき級数

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r$$

を表わすとする。係数 $A_r(x)$ はすべて D で正則とする。

定理 1 仮定:

1° $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ を $A_0(x)$ の固有値としたとき、任意の二つの固有値 $\lambda_j(x), \lambda_k(x)$ に対し

$$(2) \quad \lambda_j(x) \not\equiv \lambda_k(x) \quad (x \in D)$$

か

$$(3) \quad \lambda_j(x) \equiv \lambda_k(x)$$

のいずれか一方が成り立つ。

2° $A_0(x)$ の Jordan の標準形は x が D を動くとき不変である。すなわち D で正則な行列 $P^0(x)$ が存在して

$$P^0(x)^{-1} A_0(x) P^0(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2 & \lambda_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n & \lambda_n(x) \end{bmatrix} = A_0(x)$$

とできる。ここで $\delta_j \equiv 1$ 又は $\equiv 0$.

3° (3) が成立するような j, k ($j \neq k$) が存在する場合には、(1) から順次導かれるいくつかの方程式に対し、1°, 2° と同様の事柄が成立する。

結論: ε のあるべき根 $\varepsilon^{\frac{1}{h}}$ の形式的べき級数 $P(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x) \varepsilon^{\frac{r}{h}}$ で次の性質をもつものが存在する。形式的変換

$$(4) \quad \vec{y} = P(x, \varepsilon) \vec{z}$$

によつて, (1) は形式的に

$$(5) \quad \varepsilon^{\sigma} \frac{d\vec{z}}{dx} = A(x, \varepsilon) \vec{z}$$

に変換される。こゝで $A(x, \varepsilon)$ は対角行列で, その対角要素は $\varepsilon^{-\frac{1}{h}}$ の多項式である。

$$\lambda_j(x, \varepsilon) = \lambda_{j0}(x) + \lambda_{j1}(x) \varepsilon^{\frac{1}{h}} + \dots + \lambda_{j, \sigma-1}(x) \varepsilon^{\sigma - \frac{1}{h}}$$

したがつて(1)は

$$\vec{y} = e^{\int \lambda_j(x, \varepsilon) \varepsilon^{-\sigma} dx} \sum_{r=0}^{\infty} \vec{p}_{rj}(x) \varepsilon^{\frac{r}{h}}$$

の形の n ケの形式解をもつ。

証明の道筋をいくつかの段階にわけて簡単に述べよう。

1° $\sigma = 0$ の場合,

2° $n = 1$ の場合,

の二つの場合は殆んど明白, 一般の場合はこの場合に帰着させる。

3° 異なる固有値が存在する場合。変換

$$\vec{y} = (P_0(x) + P_1(x)\varepsilon + \dots) \vec{u} \quad (P_0(x) = P^{\circ}(x))$$

によつて, (1) が

$$(6) \quad \varepsilon^{\sigma} \frac{d\vec{u}}{dx} = (B_0(x) + B_1(x)\varepsilon + \dots) \vec{u} \quad (B_0(x) = A_0(x))$$

になつたとする。そのとき, $P_1(x), P_2(x), \dots$ を適当にとつて, 順次 $B_1(x), B_2(x), \dots$ の (j, k) 要素を 0 にできる。(たとし $\lambda_j(x) \neq \lambda_k(x)$),
したがつて, (1) を最初の係数行列の固有値がすべて等しいような方程式群にわけることができる。

4° 固有値が等しく 1 が現われない場合。

(6) において, $B_0(x) = \lambda(x)I$ (I は単位行列) の場合には

$$\vec{u} = e^{\int \lambda(x) \varepsilon^{-\sigma} dx} \vec{v}$$

とおけば, (6)は

$$\varepsilon^{\sigma-1} \frac{d\vec{v}}{dx} = (B_1(x) + B_2(x)\varepsilon + \dots) \vec{v}$$

となり, σ の値が1つ減る

5° 固有値が等しく1が現われる場合。

(6)に対して変換

$$\vec{u} = (Q_0(x) + Q_1(x)\varepsilon + \dots) \vec{v} \quad (Q_0(x) = I)$$

を行つて,

$$\varepsilon^{\sigma} \frac{d\vec{v}}{dx} = (C_0(x) + C_1(x)\varepsilon + \dots) \vec{v} \quad (C_0(x) = A_0(x))$$

になつたとする。 $Q_1(x), Q_2(x), \dots$ を適当にえらんで, $C_1(x), C_2(x), \dots$ の要素をなるべく多く0にする。次に,

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{(-1)\mu} & 0 & & \\ 0 & \varepsilon^{(n-2)\mu} & & \\ & & \varepsilon^{\mu} & 0 \\ & & \sigma & 1 \end{bmatrix} \vec{w}$$

の形の変換を行う。 μ として適当な有理数をとると

$$\varepsilon^{\sigma'} \frac{d\vec{w}}{dx} = (D_0(x) + D_1(x)\varepsilon^{\frac{1}{h}} + \dots) \vec{w} \quad (\sigma' \text{ は有理数})$$

の形にできる。つぎの三つの場合が起る: (a) $\sigma' = 0$, (b) $D_0(x)$ が少くとも二つの異なる固有値をもつ, (c) $\sigma' > 0$, かつ $D_0(x)$ の固有値はすべて等しい。(a)の場合は1°により解け, (b)の場合は3°の方法により方程式をわけることができる。

6° (d)の場合がおこるとき, 5°で述べた方法を有限回くりかえせば, 必ず(a), (b)の場合のいずれかの場合になる。

以上3°~5°の reduction をくりかえせば求める変換がえられる。

定理2. N を適当に大きくとると, 変換

$$(7) \quad \vec{y} = (P_0(x) + P_1(x)\varepsilon^{\frac{1}{h}} + \dots + P_N(x)\varepsilon^{\frac{N}{h}}) \vec{z}$$

によつて, (1)は次の形になる。

$$(8) \quad \varepsilon^\sigma \frac{d\vec{z}}{dx} = (A(x, \varepsilon) + \varepsilon^\sigma C(x, \varepsilon)) \vec{z}$$

$$C(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} C_r(x) \frac{\varepsilon^r}{h}$$

注意, 変換(7)は解析的意味をもつ。

1.2. 解の漸近展開

定理 3. 方程式

$$(9) \quad \varepsilon^\sigma \frac{d\vec{y}}{dx} = A(x, \varepsilon) \vec{y}$$

を考える。

仮定: (i) D は閉曲線 $\Gamma: x=x(t)$ でかこまれた領域。 t は Γ 上の一点から測つた弧の長さで $x'(t)$ は区分的に連続。

Δ は ε 平面の角領域: $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\theta < \arg \varepsilon < \bar{\theta}$ 。

(ii) $A(x, \varepsilon)$ は $x \in \bar{D}$, $\varepsilon \in \Delta$ で連続, $x \in D$, $\varepsilon \in \Delta$ で正則, かつ, $x \in \bar{D}$, $\varepsilon \in \Delta$ で

$$A(x, \varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

に漸近展開される。

(iii) $A_r(x)$ は \bar{D} で連続, D で正則

(iv) (9) は形式変換

$$\vec{y} = (P_0(x) + P_1(x)\varepsilon + \dots) \vec{z}$$

によつて

$$\varepsilon^\sigma \frac{d\vec{z}}{dx} = A(x, \varepsilon) \vec{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1(x, \varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \dots & & \lambda_n(x, \varepsilon) \end{bmatrix} \vec{z}$$

に移る。ここで

$$\lambda_j(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\sigma-1} \lambda_{jr}(x) \varepsilon^r$$

M 番号 k を固定したとき, $j=1, \dots, n$ に対し, Γ 上に二点 x_j, ξ_j , *よび σ で連続, D で正則な函数 $g_j(x)$ が存在して

$$R(x'(t)) \left(\frac{\lambda_j(x, \varepsilon) - \lambda_k(x, \varepsilon)}{\varepsilon^\sigma} + g_j(x) \right) \leq -\eta \quad (x \in \widehat{x_j, \xi_j}, \varepsilon \in \Delta)$$

$$R(x'(t)) \left(\frac{\lambda_j(x, \varepsilon) - \lambda_k(x, \varepsilon)}{\varepsilon^\sigma} + g_j(x) \right) \geq \eta \quad (x \in \widehat{x_j, \xi_j}, \varepsilon \in \Delta)$$

が成立する。 η の正の数である。

結論: (1) は $x \in \overline{D}$, $\varepsilon \in \Delta$, $\varepsilon \rightarrow 0$ において

$$e^{\int \lambda_j(x, \varepsilon) \varepsilon^{-\sigma} dx} \sum_{r=0}^{\infty} \vec{p}_{rk}(x) \varepsilon^r$$

に漸近展開可能な解をもつ。 $\vec{p}_{rk}(x)$ は $P_r(x)$ の k 番目の列ベクトルである。

N を十分大きくとつて, 変換

$$\vec{y} = (P_0(x) + P_1(x)\varepsilon + \dots + P_N(x)\varepsilon^N) \vec{u}$$

を行つと,

$$\varepsilon^\sigma \frac{d\vec{u}}{dx} = (A(x, \varepsilon) + \varepsilon^\sigma B(x, \varepsilon)) \vec{u}$$

の形になる。さらに

$$\vec{u} = e^{\int \lambda_k(x, \varepsilon) \varepsilon^{-\sigma} dx} \vec{v}$$

によつて,

$$(10) \quad \varepsilon^\sigma \frac{d\vec{v}}{dx} = (A(x, \varepsilon) - \lambda_k(x, \varepsilon)I + \varepsilon^\sigma B(x, \varepsilon)) \vec{v}$$

に移る。(10) は変換

$$\vec{v} = (P_0(x) + \dots + P_N(x)\varepsilon^N)^{-1} (P_0(x) + P_1(x)\varepsilon + \dots) \vec{w} \quad \text{に} \quad \vec{w} = \vec{v}$$

$$\varepsilon^\sigma \frac{d\vec{w}}{dx} = (A(x, \varepsilon) - \lambda_k(x, \varepsilon)I)$$

に移るから, (10) は

$$\vec{v} = \sum_{r=0}^{\infty} \vec{q}_{rk}(x) \varepsilon^r$$

の形の形式解をもつ。したがって定理 3 を証明するには次の定理を証明すればよい。

定理 4 方程式

$$\varepsilon^\sigma \frac{d\vec{y}}{dx} = (A(x, \varepsilon) + \varepsilon^\sigma A(x, \varepsilon) \vec{y})$$

において次の仮定をおく。

- (i) 定理 3 の(i)と同じ
- (ii) " " (iii) " "
- (iii) " " (iii) " "
- (iv) $A(x, \varepsilon)$ は定理 3 の $A(x, \varepsilon)$ と同じ
- (v) 各 j に対し, $x_j, \xi_j \in \Gamma$ と $q_j(x)$ が存在して

$$R(x'(t))(\lambda_j(x, \varepsilon)\varepsilon^{-\sigma} + q_j(x)) \leq -\eta \quad (x \in \widehat{\xi_j} x_j, \varepsilon \in \Delta)$$

$$R(x'(t))(\lambda_j(x, \varepsilon)\varepsilon^{-\sigma} + q_j(x)) \geq \eta \quad (x \in x_j \widehat{\xi_j}, \varepsilon \in \Delta)$$

- (vi) 形式解 $\sum_{r=0}^{\infty} \vec{p}_r(x) \varepsilon^r$ をもつ。

そのとき, $x \in \bar{D}$, $\varepsilon \in \Delta$ で $\sum \vec{p}_r(x) \varepsilon^r$ に漸近展開可能な解が存在する。

定理 4 の条件 (v) は人工的にみえるかも知れないが, 適当に, D, Δ の部分領域をとればそれに対して (v) がいつでも満されるようにできる。

II. 二つの助変数を含む方程式

二つの助変数 ε, ζ を含む方程式

$$(1) \quad \varepsilon^\sigma \zeta^\tau \frac{d\vec{y}}{dx} = A(x, \varepsilon, \zeta) \vec{y}$$

を考える。I と同様最初 $A(x, \varepsilon, \zeta)$ は形式的べき級数

$$(2) \quad A(x, \varepsilon, \zeta) = \sum_{r,s=0}^{\infty} A_{rs}(x) \varepsilon^r \zeta^s$$

としよう。 $\sigma \leq 0, \tau \leq 0$ ならば議論は簡単なので $\sigma > 0$ または $\tau > 0$ としよう。

微係数 $\frac{d\vec{y}}{dx}$ は

$$(3) \quad \varepsilon^{-\sigma} \zeta^{-\tau} \sum_{r,s=0}^{\infty} A_{rs}(x) \varepsilon^r \zeta^s$$

に等しく、この級数の中には負のべきをもつ項が一般に無限個存在する。このため一つの助変数を含む場合と本質的に異なる事情が生ずる。まずその点について説明しよう。

1° 級数(3)において

$$A_{00}(x) \equiv 0$$

ならば、 $\varepsilon^{-\sigma} \zeta^{-\tau} A_{00}(x)$ は $\varepsilon, \zeta \rightarrow 0$ のとき他のどの項よりも早く ∞ に行く、すなわち主要項である。

しかし $A_{00}(x) \equiv 0$ であつても、一般に σ, τ の値をへらせないので、 $A_{00}(x) \equiv 0$ のときには ε, τ が独立に 0 に近づく時の主要項は存在しないのが普通である。

2° $\sigma > 0, \tau < 0$ または $\sigma < 0, \tau > 0$ のときは $\varepsilon^{\sigma} \zeta^{\tau}$ は $\varepsilon \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0$ のとき不定である。

3° $\sigma > 0, \tau > 0$ でかつ $A_{00}(x)$ の固有値がすべて異なるならば、適当な形式的変換

$$\vec{y} = (P_{00}(x) + P_{10}(x)\varepsilon + P_{01}(x)\zeta + \dots) \vec{z}$$

によつて、(1)を対角行列 $A(x, \varepsilon, \zeta)$ を係数にもつ方程式

$$\varepsilon^{\sigma} \zeta^{\tau} \frac{d\vec{z}}{dx} = A(x, \varepsilon, \zeta) \vec{z}$$

に変換できる。しかし(1)を

$$\varepsilon^{\sigma} \zeta^{\tau} \frac{d\vec{u}}{dx} = (A(x, \varepsilon, \zeta) + \varepsilon^{\sigma} \zeta^{\tau} B(x, \varepsilon, \zeta)) \vec{u}$$

の形の方程式に導くための変換は一般に無限項を必要とする。したがつて、定理3を定理4に帰着させる手法は使えない。

以上の困難を除くことが第一の目標である。

II.1. 助変数の変換

直交座標を入れた平面 Σ を用意し、横軸を X 軸、縦軸を Y 軸としよう。級数(3)

$$\varepsilon^{-\sigma} \zeta^{-\tau} \sum_{r,s=0}^{\infty} A_{rs}(x) \varepsilon^r \zeta^s$$

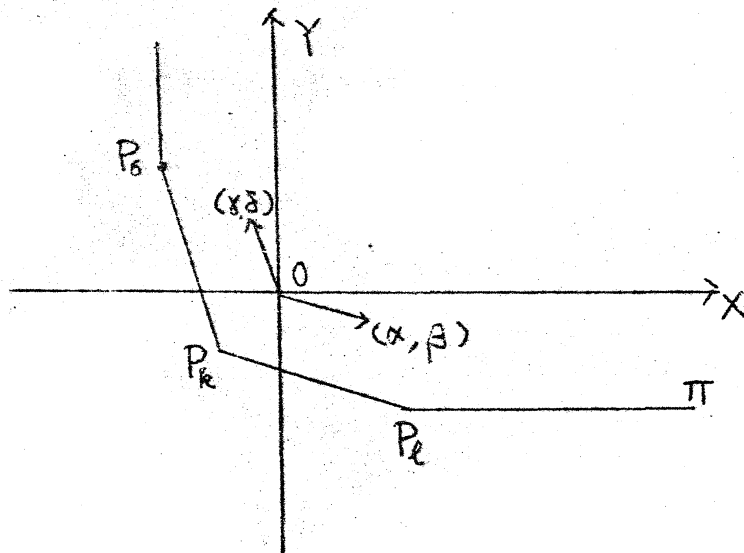
の恒等的に 0 でない係数 $A_{rs}(x)$ に対して Σ 上の点 $(r-\sigma, s-\tau)$ を対応させることによつて、 Σ 上の格子点の集合 M が得られる。 M の点の X 座標、Y 座標の最小はそれぞれ $-\sigma, -\tau$ とする。X 座標 $-\sigma$ をもつ M の点のうち Y 座標が最小のものを $P_1(r_1-\sigma, s-\tau)$ ($r_1=0$)

とする。点 P_1 を通り Y 軸に平行な直線を正の向きに回転させたとき最初に M の点 (P_1 以外の) を通る直線の上にあつて P_1 と最も遠い M の点を $P_2(r_2 - \sigma, s_2 - \tau)$ とする。つぎに直線 P_1P_2 を正の向きに回転させて、前と同様に M の点 $P_3(r_3 - \sigma, s_3 - \tau)$ を得る。これを有限回くりかえして、 Y 座標が $-\tau$ の M の点のうち X 座標が最小となる点 $P_l(r_l - \sigma, s_l - \tau)$ ($s_l = 0$) に達する。半直線 $P_0P_1: x = -\sigma, y \geq s_1 - \tau$, 線分 $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{l-1}P_l$, 半直線 $P_lP_{l+1}: y = -\tau, x \geq r_l - \sigma$ を辺とする凸多边形 Π をつくる。頂点 P_k ($k=1, \dots, l$) で隣合う二辺 $P_{k-1}P_k, P_kP_{k+1}$ をとる。 $(\alpha, \beta), (r, \delta)$ をそれぞれベクトル $\vec{P_kP_{k+1}}, \vec{P_kP_{k-1}}$ の正数倍にとつて、 i と j が整数の集合を動くとき

$$(i\alpha + jr, i\beta + j\delta)$$

が \mathbb{Z} の格子点をつくすようにできる。そのとき級数(3)を

$$\varepsilon' = \varepsilon' \zeta' \beta, \quad s' = \varepsilon' r' \zeta' \delta$$



のべき級数

$$(4) \quad \varepsilon' - \sigma' \zeta' - \tau' \sum B_{rs}(x) \varepsilon' r' \zeta' s$$

に書き直すことができる。ここで

$$B_{00}(x) = A_{r_k} s_k(x) \approx 0,$$

$$\sigma' \alpha + \tau' r = -r_k + \sigma, \quad \sigma' \beta + \tau' r = s_k + \tau$$

ゆえに(4)は主要項 $B_{00}(x)$ をもつ。

つぎに、(4)において $\sigma' > 0$, $\tau' < 0$ の場合を考えよう。(4)から作った多边形 Π' はたゞ一つの頂点 $P_1'(-\sigma', -\tau')$ をもつ。仮定から二つの頂点 P_1' , O (原点) をもつ凸多边形 Π' を作ることができる。頂点 P_1' をとって、(3)から(4)を作ったと同じ操作を施して作った級数

$$(5) \quad \varepsilon'' - \sigma'' \quad \delta'' - \tau'' \quad \sum C_{rs}(x) \varepsilon'' \tau \delta'' s$$

に対して

$$\sigma'' > 0, \tau'' = 0$$

を得る。同様に0から出発して(5)を得たとすれば

$$\sigma'' = 0, \tau'' > 0$$

を得る。

$\sigma' < 0, \tau' > 0$ の場合にも同様である。

このようにして与えられた級数から、主要項をもちかつ主要項は正のべきをもたないような有限個の級数が導かれる。

これに対応して方程式(1)から

$$(6) \quad (\varepsilon^\alpha \zeta^\beta)^\kappa (\varepsilon^\tau \zeta^\sigma)^\omega \frac{d\vec{y}}{dx} = \sum B_{rs}(x) (\varepsilon^\alpha \zeta^\beta)^\tau (\varepsilon^\tau \zeta^\sigma)^\delta s$$

の形の有限個の方程式が導かれる。ここで $\varepsilon, \omega \geq 0$, $B_{00}(x) \equiv 0$ 。(1)の代りに(6)を考えることにすれば、1°, 2° の困難はさけたことになる。

II.2. 累次級数化

方程式

$$(7) \quad \varepsilon^\sigma \zeta^\tau \frac{d\vec{y}}{dx} = (\sum A_{rs}(x) \varepsilon^\tau \zeta^\delta) \vec{y}$$

において $\sigma, \tau \geq 0$ かつ $A_{00}(x)$ は n 個の互に異なる固有値をもつものとしよう。そのとき前に述べたように、形式変換

$$\vec{y} = P(x, \varepsilon, \zeta) \vec{z} = (\sum P_{rs}(x) \varepsilon^\tau \zeta^\delta) \vec{z}$$

によつて(7)を対角行列 $A(x, \varepsilon, \zeta)$ を係数とする

$$(8) \quad \varepsilon^\sigma \zeta^\tau \frac{d\vec{z}}{dx} = A(x, \varepsilon, \zeta) \vec{z}$$

に変換できる。(7)を

$$(9) \quad \varepsilon^\sigma \zeta^\tau \frac{d\vec{u}}{dx} = (A(x, \varepsilon, \zeta) + \varepsilon^\sigma \zeta^\tau B(x, \varepsilon, \zeta)) \vec{u}$$

の形の方程式に変換するということは、級数 $\varepsilon^{-\sigma} \zeta^{-\tau} \sum A_{rs}(x) \varepsilon^r \zeta^s$ の多辺形 π と X 軸、 Y 軸との間の部分に対応する項を対角化すること以外ならない。

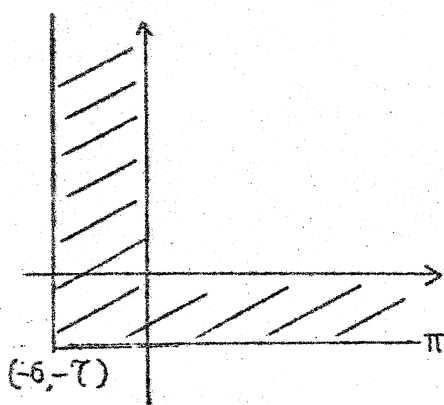


図 2

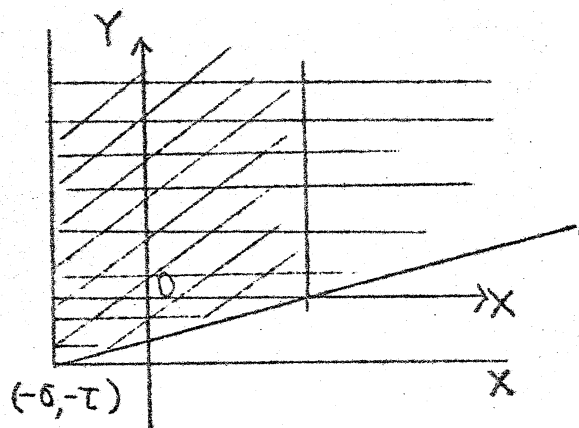


図 3

もし、 $A_{rs}(x) \geq 0$ であるような項が図 3 における横線の部分にしかないとなれば、(7)を(9)の形にするためには斜線の部分に対応する $P_{rs}(x)$ を使えば十分である。これらの $P_{rs}(x)$ に現われる s の番号は無限個であるが、 r の番号は有限個である。したがって、 $A(x, \varepsilon, \zeta)$ 、 $P(x, \varepsilon, \zeta)$ を ε, ζ の二重級数でなく、累次級数

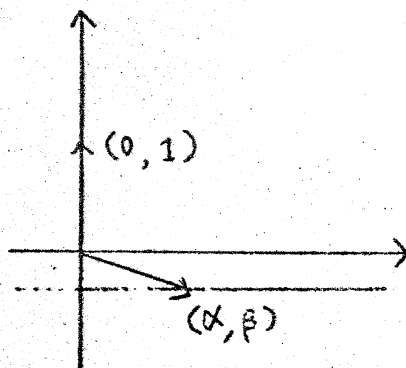
$$A(x, \varepsilon, \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} A_{rs}(x) \zeta^s \right) \varepsilon^r = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x, \zeta) \varepsilon^r$$

$$P(x, \varepsilon, \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} P_{rs}(x) \zeta^s \right) \varepsilon^r = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(x, \zeta) \varepsilon^r$$

と考え、有限個の $P_r(x, \zeta)$ を決めれば、(7)を(9)に変換できるであろう。

事実そうなのである。

上の仮定が成り立つようにするには、適当なベクトル (α, β) を図のようにとり、級数を $\varepsilon^{\alpha} \zeta^{\beta}$ 、 ζ のベキ級数に書きかえればよい。



Ⅱ.3. 累次漸近展開

今までは形式的級数を相手にして来た。つぎに函数 $A(x, \varepsilon, \zeta)$ と形式級数 $\sum A_{rs}(x) \varepsilon^r \zeta^s$ の間に橋をわたすことが問題である。 $A(x, \varepsilon, \zeta)$ の ε, ζ に関する漸近展開が $\sum A_{rs}(x) \varepsilon^r \zeta^s$ であつても級数 $\sum_{s=0}^{\infty} A_{rs}(x) \zeta^s$ ($r=0, 1, \dots$) は意味がない。しかし次のように考えればよい。

D は x の動く複素領域, Δ, Ω はそれぞれ角領域 $|\varepsilon| < \varepsilon_0, \underline{\theta} < \arg \varepsilon < \overline{\theta}, |\zeta| < \zeta_0, \underline{\phi} < \arg \zeta < \overline{\phi}$ とする。そのとき

(i) $A(x, \varepsilon, \zeta)$ は $x \in D, \varepsilon \in \Delta, \zeta \in \Omega$ において正則

(ii) $A(x, \varepsilon, \zeta)$ は $x \in D, \zeta \in \Omega$ のとき ε に関して $\varepsilon \in \Delta, \varepsilon \rightarrow 0$ のとき

$$A(x, \varepsilon, \zeta) \sim \sum A_r(x, \zeta) \varepsilon^r$$

に漸近展開可能

(iii) $A_r(x, \zeta)$ は $x \in D, \zeta \in \Omega$ で正則

(iv) $A_r(x, \zeta)$ は $x \in D$ のとき ζ に関して $\zeta \in \Omega, \zeta \rightarrow 0$ において

$$A_r(x, \zeta) \sim \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs}(x) \zeta^s$$

に漸近展開可能

そのとき $A(x, \varepsilon, \zeta)$ は $\sum (\sum_s A_{rs}(x) \zeta^s) \varepsilon^r$ に累次漸近展開可能という。

$A(x, \varepsilon, \zeta)$ が級数 $\sum (\sum_s A_{rs}(x) \zeta^s) \varepsilon^r$ に累次漸近展開可能のとき, ベクトル (α, β)

(r, δ) を辺とする角領域が第一象限を含むならば, $A(x, \varepsilon, \zeta)$ はまた級数

$\sum_r (\sum_s B_{rs}(x) (\varepsilon^r \zeta^\delta)^s (\varepsilon^\alpha \zeta^\beta)^r)$ に累次漸近展開可能である。ゆえに, Ⅱ.1, 2 で必要

とした級数の書き直しに際し, 累次漸近展開の可能性は保たれる。

Ⅱ.4 形式解

方程式

$$\varepsilon^\sigma \zeta^\tau \frac{d\overline{y}}{dx} = A(x, \varepsilon, \zeta) \overline{y}$$

において, $A(x, \varepsilon, \zeta)$ は形式的ベキ級数

$$A(x, \varepsilon, \zeta) = \sum A_r(x, \zeta) \varepsilon^r$$

$$A_r(x, \zeta) = \sum A_{rs}(x) \zeta^s$$

とする。

定理 5 仮定

(i) $\sigma, \tau \geq 0$

(iii) $A_{rs}(x)$ は D で正則

(iv) $A_{00}(x)$ は D で互に異なる n 個の固有値をもつ。

結論：形式的べき級数

$$P(x, \varepsilon, \zeta) = \sum P_r(x, \zeta) \varepsilon^r$$

$$P_r(x, \zeta) = \sum P_{rs}(x) \zeta^s$$

で次の性質をもつものが存在する。

(a) $P_{rs}(x)$ は D で正則

(b) 形式的変換

$$\vec{y} = P(x, \varepsilon, \zeta) \vec{z}$$

で (10) は対角行列を係数とする。

$$(11) \quad \varepsilon^\sigma \zeta^\tau \frac{d\vec{z}}{dx} = A(x, \varepsilon, \tau) \vec{z}$$

に移る。

(c) $A(x, \varepsilon, \zeta)$ の j 番目の対角要素は形式的べき級数

$$\lambda_j(x, \varepsilon, \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{jr}(x, \zeta) \varepsilon^r$$

$$\lambda_{jr}(x, \zeta) = \sum \lambda_{jrs}(x) \zeta^s$$

(d) $\lambda_{jrs}(x)$ は D で正則で特に $\lambda_{j00}(x), \dots, \lambda_{n00}(x)$ は $A_{00}(x)$ の。

定理 6 $\tau > 0$ ならば定理 5 の仮定にさらに次の仮定を加える。

(iv) 正の数 $\rho > 0$ が存在して $s \leq \rho r$ をみたす (r, s) に対し $A_{rs}(x) \equiv 0$

そのとき、定理 5 の結論で (c) を (c') で置きかえた結果が得られる。

$$(c') \quad \lambda_j(x, \varepsilon, \tau) = \sum_{r=0}^{\sigma-1} \lambda_{jr}(x, \zeta) \varepsilon^r$$

$$\lambda_{jr}(x, \zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{jrs}(x) \zeta^s$$

定理 7 前定理の仮定がみたされたとする。そのとき N を十分大きくとれば、

$$\vec{y} = \left(\sum_{r=0}^N P_r(x, \zeta) \varepsilon^r \right) \vec{u}$$

によつて (10) は

$$(11) \quad \varepsilon^\sigma \zeta^\tau \frac{d\vec{u}}{dx} = (A(x, \varepsilon, \zeta) + \varepsilon^\sigma \tau^\tau B(x, \varepsilon, \tau)) \vec{u}$$

に移る。ここで $A(x, \varepsilon, \zeta)$ は (c) をみたし、 $B(x, \varepsilon, \zeta)$ はべき級数

$$B(x, \varepsilon, \zeta) = \sum B_r(x, \zeta) \varepsilon^r, \quad B_r(x, \zeta) = \sum B_{rs}(x) \zeta^s$$

である。

定理 8 上の三定理において、 $A_r(x, \zeta)$ は

$$A_r(x, \zeta) \sim \sum A_{rs}(x) \zeta^s$$

に漸近展開可能ならば、 $P_r(x, \zeta)$, $\lambda_{jr}(x, \zeta)$, $B_r(x, \zeta)$ も $\sum P_{rs}(x) \zeta^s$, $\sum \lambda_{jrs}(x) \zeta^s$, $\sum B_{rs}(x) \zeta^s$ に漸近展開可能である。ただし $\sigma=0$ のときは漸近展開可能な領域は制限をうける。

上の結果から (10) の形式解が得られる。

II. 5. 解の存在

$A(x, \varepsilon, \zeta)$ の累次漸近展開可能性を仮定すれば方程式 (11) に対して、一助変数の場合とまったく同様な定理が成立する。したがって形式解を累次漸近展開とする (10) の解の存在がいえ。

II. 6. 反省

級数 $\sum A_{rs}(x) \varepsilon^r \zeta^s$ を $\sum B_{rs}(x) (\varepsilon^\alpha \zeta^\beta)^r (\varepsilon^\tau \zeta^\delta)^s$ と書き直したとしよう。第一の級数が

$$(12) \quad x \in D, \varepsilon \in \Delta, \zeta \in \Omega$$

で意味をもつとして、第二の級数を

$$(13) \quad x \in D, |\varepsilon^\alpha \zeta^\beta| < \varepsilon_0', \quad \theta' < \arg \varepsilon^\alpha \zeta^\beta < \bar{\theta}, |\varepsilon^\tau \zeta^\delta| < \zeta_0', \\ \phi' < \arg \varepsilon^\tau \zeta^\delta < \bar{\phi}'$$

で考える限り、同値ではない。(13) は

$$x \in D, \quad \frac{1}{\varepsilon_0'} |\varepsilon|^{-\frac{\alpha}{\beta}} < |\zeta| < \zeta_0' |\varepsilon|^{-\frac{\tau}{\delta}}$$

をみたす $D \times \Delta \times \Omega$ の部分領域である。

$\varepsilon^{-\sigma} \zeta^\tau \sum A_{rs}(x) \varepsilon^r \zeta^s$ の多辺形 Π から導かれるすべての級数を考えても、もとの級数と同値ではない。

つぎに $A_{00}(x)$ の固有値のいくつかが恒等的に等しい場合はまだ十分調べられていない。